page 272 1/5 -1992-
ECOLE de L'AIR Math 1

Cette épreuve comporte deux parties, numérotées 1 et 2.

COMMENTAIRES

Dans tout le problème, on admettra les résultats de cours suivants, qu'on ne cherchera ni à démontrer, ni à justifier. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Sauf mention du contraire, toutes les fonctions considérées sont des fonctions numériques réelles, c'est à dire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite ***convexe sur*** I, si elle vérifie l'inégalité:

$$\forall x', x'' \in I \text{ et } \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x'+(1-\lambda)x'') \leq \lambda f(x')+(1-\lambda)f(x'') .$$

- Une fonction convexe à valeurs réelles, définie sur un intervalle fermé borné, est continue et bornée sur cet intervalle. Lorsque f admet une dérivée seconde $f''(x) \geq 0$, positive ou nulle sur un intervalle I, alors f est convexe sur I.

- Une fonction f, définie sur un intervalle fermé borné [a,b], est ***intégrable au sens de Riemann*** sur [a,b], si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier f_ε^- et f_ε^+ sur [a,b], telles que :

$$\forall x \in [a,b], \quad f_\varepsilon^-(x) \leq f(x) \leq f_\varepsilon^+(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b (f_\varepsilon^+(x)-f_\varepsilon^-(x))dx \leq \varepsilon .$$

Si f est intégrable au sens de Riemann sur [a,b], alors f est bornée sur [a,b]. De plus, si $-\infty < A \leq f(x) \leq B < +\infty$ pour tout $x \in [a,b]$, et si g est une fonction réelle continue sur [A,B], alors $g \circ f$ est encore intégrable au sens de Riemann sur [a,b]. On note L(a,b), l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur [a,b].

- Si f est intégrable au sens de Riemann sur [a,b], alors $\int_a^b f(t)dt$ est la limite des ***sommes de Riemann*** $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(\zeta_i)$ lorsque $\max_{1\leq i\leq n}(x_i-x_{i-1}) \longrightarrow 0$

$\zeta_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,n$ et $x_0=a<\ldots<x_n=b$.

- Si f_1 et f_2 sont deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur [a,b], alors leur produit $f_1 \times f_2$ est intégrable au sens de Riemann sur [a,b].

- Si f est intégrable au sens de Riemann sur [a,b], alors les deux fonctions $x \longmapsto f_+(x)=\max(f(x),0)$ et $x \longmapsto f_-(x)=\max(-f(x),0)$ sont intégrables au sens de Riemann sur [a,b], et telles que, $\forall x \in [a,b]$, $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$.

- On note lnx, le logarithme népérien de x.

- On note **{x : P(x)}**, l'ensemble des x tels que la propriété P(x) soit vraie.

PROBLEME.

Le but du problème est d'étudier les valeurs extrêmes de certaines ***fonctionnelles*** telles que les applications, qui à une fonction f, associent les nombres réels $\int_0^1 f(t)dt$ ou $\int_0^1 \psi(t)f(t)dt$, lorsque f varie dans un ensemble de la forme $\{f \in L(0,1): \int_0^1 \Phi(f(t))dt \leq 1\}$, où Φ est une fonction convexe spécifiée par l'énoncé, et ψ une fonction intégrable.

PREMIERE PARTIE.

On considère la fonction h: $[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\begin{cases} h(x)=x\ln x-x+1 \quad \text{pour } x>0, \\ h(0)=1. \end{cases}$$

1°) a) Etablir le tableau de variations de h et montrer que h est continue sur $[0,+\infty[$. Etudier les branches asymptotiques de h. Vérifier que h est convexe sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que, pour tout c>0, il existe deux nombres, notés δ_c^- et δ_c^+ définis par $\delta_c^- = \inf\{x : x \geq 0, h(x) \leq 1/c\}$ et $\delta_c^+ = \sup\{x : x \geq 0, h(x) \leq 1/c\}$.

Ici, et dans la suite du problème, on désigne par **sup A** (resp. **inf A**) la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie A bornée de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Etablir, pour tout $0 < c < +\infty$, les inégalités: $0 \leq \delta_c^- < 1 < \delta_c^+ < +\infty$.

c) Etablir un développement limité d'ordre 4, puis à un ordre $N \geq 4$ quelconque de la fonction $u \mapsto h(1+u)$, au voisinage de 0.

d) Donner les tableaux de variation des fonctions $c \mapsto \delta_c^-$ et $c \mapsto \delta_c^+$, lorsque c varie sur $]0,+\infty[$. Donner des équivalents simples de $(\delta_c^- - 1)$ et de $(\delta_c^+ - 1)$ lorsque $c \to +\infty$.

e) Déterminer la limite, lorsque $c \to +\infty$, de $c_x(\delta_c^- + \delta_c^+ - 2)$.

2°) On désigne par $L_+(0,1)$, l'ensemble des fonctions numériques f, définies sur [0,1], qui possèdent les propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in [0,1] \quad f(x) \geq 0$.
(ii) f est intégrable au sens de Riemann sur [0,1].

a) Vérifier que, $\forall f \in L_+(0,1)$ et $\forall c > 0$, $h(\frac{f}{c}) \times c \in L_+(0,1)$.

Pour tout $c > 0$, on note $\Delta_c = \{f \in L_+(0,1) : \int_0^1 h(\frac{f(t)}{c}) \times c\,dt \leq 1\}$, l'ensemble des fonctions $f \in L_+(0,1)$ telles que $\int_0^1 h(\frac{f(t)}{c}) \times c\,dt \leq 1$.

Déterminer les fonctions de la forme $f(x) = \gamma$, $x \in [0,1]$, qui appartiennent à Δ_c (γ est une constante). Montrer que ces fonctions sont telles que γ varie dans un intervalle de la forme $[a_c^-, a_c^+]$, où a_c^- et a_c^+ sont des constantes que l'on précisera.

Déterminer les limites de a_c^- et de a_c^+ lorsque $c \to 0$ (resp. $c \to +\infty$).

b) Soit Φ: $[0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$, une fonction convexe (**voir commentaires de l'énoncé**), N un entier ≥ 1 et $x_1, x_2 \ldots\ldots x_{2^N}$ des nombres réels ≥ 0.

Vérifier l'inégalité suivante pour N=1, pour N=2, puis pour $N \geq 3$ quelconque :

$$\Phi(2^{-N} \sum_{i=1}^{2^N} x_i) \leq 2^{-N} \sum_{i=1}^{2^N} \Phi(x_i).$$

c) En déduire l'inégalité :

$$\forall f \in L_+(0,1), \quad \Phi(\int_0^1 f(t)dt) \leq \int_0^1 \Phi(f(t))dt.$$

d) Etablir l'inégalité :

$$\forall c > 0 \text{ et } \forall f \in L_+(0,1), \quad h(\frac{1}{c}\int_0^1 f(t)dt) \times c \leq \int_0^1 h(\frac{f(t)}{c}) \times c\,dt.$$

e) Montrer que

$$\inf\{\int_0^1 f(t)dt : f \in \Delta_c\} = c \times \delta_c^- \quad \text{et} \quad \sup\{\int_0^1 f(t)dt : f \in \Delta_c\} = c \times \delta_c^+.$$

On donnera des exemples explicites de fonctions f pour lesquelles les bornes inférieure et supérieure ci-dessus sont atteintes.

3°) a) Déterminer les variations de la fonction $g_y(x)=xy-h(x)$, où $y \in \mathbb{R}$ est fixé. En déduire l'inégalité:

$$\forall x \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad xy \leq h(x)+e^y-1.$$

Montrer que cette inégalité est, pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, toujours stricte pour $x \geq 0$, $x \neq Y(y)$, où $Y(y)$ est une fonction de y que l'on précisera. Que se passe-t-il pour $x=Y(y)$?

b) Soit $\psi \in L(0,1)$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. Montrer que si $\int_0^1 |\psi(t)|dt = 0$, alors on a nécessairement:

$$\forall f \in L_+(0,1), \qquad \int_0^1 \psi(t)f(t)dt=0.$$

c) On suppose maintenant que $\psi \in L_+(0,1)$, et que, pour une constante $\theta>0$ convenable, on a l'inégalité: $\forall x \in [0,1]$, $\psi(x) \geq \theta$. On considère la fonction

$$H_\psi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad H_\psi(\lambda) = \int_0^1 h(\exp(\lambda\psi(t)))dt .$$

- Que vaut $H_\psi(0)$?
- Que vaut $\lim_{\lambda \to +\infty} H_\psi(\lambda)$? $\lim_{\lambda \to -\infty} H_\psi(\lambda)$?

d) On admet que H_ψ est continue sur $\mathbb{R}$. Donner le tableau de variations de H_ψ, et établir, $\forall c > 1$, l'existence de deux constantes $\lambda_c^- < 0 < \lambda_c^+$, dépendant de ψ, telles que $H_\psi(\lambda_c^-) = H_\psi(\lambda_c^+) = 1/c$.

e) On se place sous les hypothèses du 3°)d).

Montrer, en posant $x=\frac{f(t)}{c}$ et $y = \lambda_c^+\psi(t)$ dans l'inégalité obtenue au 3°)a), que,

$$\forall f \in \Delta_c , \quad \int_0^1 \psi(t)f(t)dt \leq \int_0^1 \psi(t)\{c_x\exp(\lambda_c^+\psi(t))\}dt.$$

f) On se place sous les hypothèses du 3°)d). Montrer que la fonction $f_0 : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f_0(t) = c_x\exp(\lambda_c^+\psi(t))$ appartient à Δ_c.

En déduire le résultat:

$$\sup\{\int_0^1 \psi(t)f(t)dt : f \in \Delta_c\} = \int_0^1 \psi(t)\{c_x\exp(\lambda_c^+\psi(t))\}dt .$$

g) Déterminer, par le même procédé, pour $c > 1$, $\inf\{\int_0^1 \psi(t)f(t)dt : f \in \Delta_c\}$.

h) Etudier, le cas où $\psi(t)$ est une constante, et retrouver les résultats de 2°)e).

DEUXIEME PARTIE.

Cette partie n'utilise que des résultats trouvés dans la question 1°) de la première partie.

On établira un algorithme simple, de type itératif, permettant d'évaluer une valeur approchée $\delta_c^+(n)$ de δ_c^+ après n itérations, et avec une précision $|\delta_c^+(n)-\delta_c^+| < 10^{-6}$ pour $c \geq 5$.

On demande de préciser, pour cet algorithme les points suivants. Donner :

1°)a) La valeur initiale de l'algorithme, que l'on justifiera à l'aide des résultats du problème. Il est recommandé d'utiliser comme valeur initiale, notée $\delta_c^+(0)$, le nombre obtenu à partir de l'équivalent simple du 1°)d) de la première partie. A défaut d'avoir obtenu ce résultat, on justifiera le choix de la valeur initiale retenue.

b) Etablir le signe de $\delta_c^+(0)-\delta_c^+$.

2°)a) Etablir les inégalités suivantes, pour tout $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$:

$$\frac{x^2}{4} \leq h(1+x) \leq x^2 .$$

b)En déduire que, dans l'intervalle considéré, δ_c^+ vérifie les inégalités :

$$1+\sqrt{\frac{1}{c}} \leq \delta_c^+ \leq 2\sqrt{\frac{1}{c}}+1 .$$

3°)a) Exposer le principe détaillé de l'algorithme, avec une justification de la convergence. Le choix précis de l'algorithme est laissé à l'appréciation du candidat.

b) Déterminer le signe de $\delta_c^+(n)-\delta_c^+$ en fonction de n.

4°) Décrire le système proposé d'arrêt de l'algorithme au bout de n itérations.

5°) Programmer l'algorithme dans un langage de programmation scientifique (laissé à l'appréciation du candidat, qui devra néanmoins préciser de manière explicite le type de langage utilisé).